数理解析研究所講究録
1024巻 1998年 63-79

モジュラー包含について

東京理科大理工学部　荒木不二洋
(Huzihiro ARAKI)
ローマ第2大学　Laszlo Zsido

§1 序論

Bisognano & Wichmann [BW]は，ミンコフスキー空間（相対論的時空）のくさび領域の中に台をもつ量子場が生成するフォン・ノイマン環の（真空ベクトルに関する）モジュラー作用素およびモジュラー共役作用素と，そのくさび領域を不変にする純ローレンツ変換およびそのくさび領域を因果的補領域（反対側のくさび領域）に写すTCP_1作用素などの相対論的変換の表現作用素とが一致するという発見をした。

最近になって，Borchers [Bo 1]はこの関係のひとつの重要な数学的側面を，巡回分離的ベクトルΩをもつフォン・ノイマン環Mと，正の生成作用素をもち，(M, Ω)の準同型半群を誘起するユニタリ作用素の一助変数群の組という抽象的な枠組の中で定式化することに成功した。すなわち，そのような一径数群$U(\lambda)$とモジュラー作用素およびモジュラー共役作用素

の交換関係（次節定理1の(1)および(2)）を導出し，くさび領域をその中へ写す（光的方向の）並行移動と上述の相対論的変換との運動論的交換関係を再現した。もちろん，モジュラー作用素およびモジュラー共役作用素がBisognanoおよびWichmannの対応にならって相対論的変換であるかの如く想像すればちょうど相対論的運動の交換関係になっているという意味である。

Wiesbrockはこの研究をさらに発展させて，片側モジュラー包含という考え方を導入し，そのような包含関係にあるフォン・ノイマン環の対$M \supset N$の（共通の巡回分離的ベクトルに関する）モジュラー作用素（M，Nおよび$M \cap N'$を考える）が共形変換群を生成し，それぞれ（比較的単純で意味がはっきりした）ある条件をみたすIII型因子環の包含の同値類と2次元カイラル共形場の物理量の因子環束の同値類が1対1に対応することを示した。[Wie 1～6]

実はこの一連の理論の基礎になる定理の証明に決定的な間違がある。[Wie 6]　著者とLaszlo Zsidoはこの間違いを正してWiesbrockの基本定理の証明を与えるとともに，一連のBorchersおよびWiesbrockの定理を，巡回分離的ベクトルの場合から，正規半有限忠実な重み（荷重）の場合に一般化した。

[A-Z]　その結果を以下簡単に紹介する。

§2 主要結果

ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上のフォン・ノイマン環Mが，その正規半有限忠実な重みφに関して標準的というのは，Mの左イデアル

$$\mathfrak{N}_\varphi^M=\{x\in M;\ \varphi(x^*x)<\infty\}$$

から$\mathcal{H}$の稠密な線形部分集合の上への線形写像

$$x\in\mathfrak{N}_\varphi^M \longrightarrow x_\varphi\in\mathcal{H}$$

が次の性質をもつときである。

$$\varphi(x^*x)=\|x_\varphi\|^2,\qquad ax_\varphi=(ax)_\varphi$$

ただし $x\in\mathfrak{N}_\varphi^M$, $a\in M$ は任意。共役線形作用素

$$S_\varphi:\ x_\varphi\longrightarrow(x^*)_\varphi$$

はその定義域

$$\{x_\varphi:\ x\in\mathfrak{A}_\varphi^M\equiv\mathfrak{N}_\varphi^M\cap(\mathfrak{N}_\varphi^M)^*\}$$

の上で可閉であり，極分解

$$\overline{S_\varphi}=J_M\,\Delta_M^{1/2}$$

によりモジュラー作用素Δ_Mとモジュラー共役作用素J_Mが定義される。

以下Mの部分環Nへのφの制限

$$\psi=\varphi|_N$$

も半有限であり，$y\in\mathfrak{N}_\psi^N\ (\subset\mathfrak{N}_\varphi^M)$ について $y_\psi=y_\varphi$ で，

$$\{y_\psi:\ y\in\mathfrak{N}_\psi^N=\mathfrak{N}_\varphi^M\cap N\}$$

が$\mathcal{H}$で稠密である場合を考える。N, $\mathcal{H}_{\varphi}^{N}$ についてのモジュラー作用素Δ_N およびモジュラー共役作用素J_N の定義はMの場合と同じである。

このような情況を，M⊃Nが共通の正規半有限忠実な重みφに関し標準形にあるという。

主要結果は次のようにまとめられる。

<u>定理1</u>　ヒルベルト空間$\mathcal{H}$上，フォン・ノイマン環の包含M⊃Nが共通の正規半有限忠実な重みφに関し標準形にあり，次の意味で片側包含関係をもつものとする。

$$\Delta_M^{it} N \Delta_M^{-it} \subset N \qquad (\forall t \leqq 0)$$

このとき，$\log \Delta_M$ と$\log \Delta_N$の定義域の共通部分は$\mathcal{H}$で稠密であり，そこで定義される作用素

$$p = \frac{1}{2\pi} (\log \Delta_N - \log \Delta_M)$$

の閉包$\bar{p}$は正の自己共役作用素であり，

$$U(a) = \exp(ia\bar{p})$$

は次の諸性質をみたす。

<u>BBW関係式</u>（BBW = Borchers, Bisognano, Wichmann）

(1)　$\Delta_M^{it} U(a) \Delta_M^{-it} = \Delta_N^{it} U(a) \Delta_N^{-it} = U(e^{-2\pi t} a)$

(2)　$J_M U(a) J_M = J_N U(a) J_N = U(-a) \qquad (t, a \in \mathbb{R})$

<u>Longoの正準自己準同型写像</u>

(3)　$J_N J_M = U(2), \qquad \gamma_2 = \mathrm{Ad}\, U(2) \in \mathrm{End}\, M.$

部分環のトンネル

(4) $\Delta_N^{it} = U(1)\,\Delta_M^{it}\,U(1)^* \quad (t \in \mathbb{R})$

(5) $N = U(1)\,M\,U(1)^*$

(6) $U(a)\,M\,U(a)^* \subset M, \quad \gamma_a = \mathrm{Ad}\,U(a) \in \mathrm{End}\,M \quad ({}^\forall a \geqq 0)$

$$M \supset \gamma_1(M) = N \supset \gamma_2(M) \supset \gamma_3(M) = \gamma_2(N) \supset \cdots$$

Lie 群の生成

(7) $\Delta_M^{it}\,\Delta_N^{-it} = U(e^{-2\pi t} - 1) \quad (t \in \mathbb{R})$

(8) $\{\Delta_M^{it}\,\Delta_N^{is} : s, t \in \mathbb{R}\}$ は 2次元の Lie 群 を生成し, Lie 環の交換関係は

$$[\,i\log\Delta_N,\ i\log\Delta_M\,] = 2\pi\,(i\log\Delta_N - i\log\Delta_M)$$
$$(= 4\pi^2 i\,p)$$

§3 エルミート写像

上の定理の証明で重要な役割を果すのは, 次に定義するエルミート写像の概念である。いま次の2組の標準形にあるフォン・ノイマン環が(前節で述べたように)あるものとする。ただし両者は完全に別もので, 前節のような包含関係は必要としない。(包含関係があっても差し支えはない。)

$$M,\ \mathcal{H},\ \varphi,\ \mathcal{N}_\varphi^M,\ S_\varphi,\ \Delta_M,\ J_M$$
$$N,\ \mathcal{K},\ \psi,\ \mathcal{N}_\psi^N,\ S_\psi,\ \Delta_N,\ J_N.$$

定義 $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ について,

$$T\mathcal{K}^{S_\psi} \subset \mathcal{H}^{S_\varphi}$$

のとき、Tは(ψ, φ)に関しエルミート写像であるという。

ただし、

$$\mathcal{H}^{S_\varphi} \equiv \{ \eta \in \mathrm{Dom}\, \overline{S_\varphi} : \overline{S_\varphi}\eta = \eta \}$$

$$\mathcal{K}^{S_\psi} \equiv \{ \xi \in \mathrm{Dom}\, \overline{S_\psi} : \overline{S_\psi}\xi = \xi \}$$

Dom は定義域を表わす。

また任意の$x \in \mathfrak{M}_\psi^N$に対し

$$T x T^* \in \mathfrak{M}_\varphi^M, \qquad (T x T^*)_\varphi = T x_\psi$$

が成り立つとき、Tはψをφで実現するという

補題

(1) $\mathcal{H}^{S_\varphi} = \overline{\{ y_\varphi : y = y^* \in \mathfrak{A}_\varphi^M \}}$

$\mathcal{K}^{S_\psi} = \overline{\{ x_\psi : x = x^* \in \mathfrak{A}_\psi^N \}}$

(2) $\mathrm{Dom}\, \overline{S_\psi} = \mathrm{Dom}\, \Delta_N^{1/2} = K^{S_\psi} + i K^{S_\psi}$

$\mathrm{Dom}\, \overline{S_\varphi} = \mathrm{Dom}\, \Delta_M^{1/2} = \mathcal{H}^{S_\varphi} + i \mathcal{H}^{S_\varphi}$

(3) $T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$が$\psi$を$\varphi$で実現すれば、$T$は$(\psi, \varphi)$に関してエルミート写像であり、$TNT^* \subset M$である。

(4) Tが等長でψをφで実現すれば、

$$x \in N \longrightarrow T x T^* \in M$$

は単射*同形写像であり、任意の$0 \leqq a \in \mathfrak{M}_\psi^N$について

$$\psi(a) = \varphi(T^* a T)$$

が成立する。

定理2　次の条件(1)〜(8)は互に同値である。

(1) T は (ψ, φ) に関してエルミート写像である。

(2) $x = x^* \in \mathfrak{A}_\psi^N$ ならば $Tx_\psi \in \mathcal{H}^{S_\varphi}$ である。

(3) $x = x^* \in \mathfrak{A}_\psi^N$, $y = y^* \in \mathfrak{A}_\varphi^M$ ならば

$$(Tx_\psi, J_M y_\varphi) \in \mathbb{R}.$$

(4) $x \in \mathfrak{A}_\psi^N$, $y \in \mathfrak{A}_\varphi^M$ ならば

$$(Tx_\psi, J_M y_\varphi) = (J_M (y^*)_\varphi, T(x^*)_\psi)$$

(5) $T\overline{S_\psi} \subset \overline{S_\varphi}\, T$

(6) $\mathrm{Dom}\,(\Delta_M^{1/2} T \Delta_N^{-1/2}) = \mathrm{Dom}(\Delta_N^{-1/2})$ であって、任意の $\xi \in \mathrm{Dom}\,(\Delta_N^{-1/2})$ について次式が成立する。

$$\Delta_M^{1/2}\, T\, \Delta_N^{-1/2}\, \xi = J_M\, T\, J_N\, \xi.$$

(7) $J_N T^* J_N$ は (φ, ψ) に関してエルミート写像である。

(8) $s \in \mathbb{R} \longrightarrow \Delta_M^{is} T \Delta_N^{-is}$ は複素変数

$$z \in \overline{S}_{-1/2} \longrightarrow T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$$ に解析接続される。 $\left(S_\beta = \{ z \in \mathbb{C} : 0 < \beta^{-1}\,\mathrm{Im}\, z < 1 \},\ \beta \in \mathbb{R},\ \beta \neq 0 \right)$

$$\begin{cases} T(z) \ ; 作用素強位相で連続 \\ T(z) \in H^\infty(S_{-1/2}) \equiv \{ S_{-\frac{1}{2}} 上の有界解析関数全体 \} \\ T(-\frac{i}{2}) = J_M\, T\, J_N \end{cases}$$

上の条件が満たされれば

$$T(z+t) = \Delta_M^{it}\, T(z)\, \Delta_N^{-it} \quad (z \in \overline{S}_{-1/2},\ t \in \mathbb{R}),$$

$$T(s - \tfrac{i}{2}) = J_M\, T(s)\, J_N \quad (s \in \mathbb{R}).$$

§4 Borchersの構造定理の一般化.

まず準備として解析接続に関する定理を述べる。

<u>定理3</u> A, Bはそれぞれ$\mathcal{H}$, $\mathcal{K}$ 上の正 作用素で非特異とし, $T\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H})$とする。次の条件は同値である。

(a) $s\in\mathbb{R}\to A^{is}TB^{-is}$ は次の"解析接続"をもつ。

$$z\in\overline{S_\beta}\longrightarrow T(z)\in\mathcal{B}(\mathcal{K},\mathcal{H}),$$

$T(z)$ は $\overline{S_\beta}$で作用素強位相で連続,

$$T(z)\big|_{S_\beta}\in H^\infty(S_\beta)$$

(b) 上の条件で作用素強位相を作用素弱位相としたもの。

(c) $\exists B_0$; Borel 集合, $\mu(B_0)\neq 0$ (μ:ルベーグ測度)

任意の$\xi\in\mathcal{K}$, $\eta\in\mathcal{H}$ に対し$f_{\xi,\eta}\in H^\infty(S_\beta)$が存在して

$$\lim_{\beta t\to+0} f_{\xi,\eta}(s+it)=(A^{is}TB^{-is}\xi,\eta)$$
$$(\text{a.a. } s\in B_0)$$

(d) $A^{-\beta}TB^\beta$ はB^β のcoreの上で定義されて有界。

(e) $\mathrm{Dom}(A^{-\beta}TB^\beta)=\mathrm{Dom}(B^\beta)$, $A^{-\beta}TB^\beta$は有界.

以上の条件が満たされているとき, 次が成立する。

$$\mathrm{Dom}(A^{iz}TB^{-iz})=\mathrm{Dom}(B^{-iz})\qquad(z\in S_\beta)$$

$$A^{iz}TB^{-iz}\subset T(z)\qquad(z\in S_\beta)$$

$$A^{it}T(z)B^{-it}=T(z+t)\qquad(t\in\mathbb{R},\ z\in\overline{S_\beta})$$

定理1の証明ではこの定理を2回使う。最初は$K=\mathcal{N}$, $T=\mathbb{1}$, $A=\Delta_M$, $B=\Delta_N$, $\beta=\frac{1}{2}$, 2回目は非自明なTについてである。

定理４（Borchersの構造定理の一般化）

$\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$, $\mu(E_0) = \mu(E_1) = 0$　（E_0, E_1 は $\mathbb{R}$ 上ボレル集合）

とし，$T(z) \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$ は $z \in \overline{S_\beta}$, $z \notin E_0 \cup E_1 + i\beta$ に対し与えられていて，一様有界，S_β で正則，かつ

(i) $T(s)$ は (Ψ, φ) に関しエルミート写像（$s \in \mathbb{R}$, $s \notin E_0$），

$$T(s) = \text{w-}\lim_{\beta t \to +0} T(s+it) \quad \text{（作用素弱位相）}$$

(ii) $J_M T(s+i\beta) J_N$ は (Ψ, φ) に関しエルミート写像で

$$T(s+i\beta) = \text{w-}\lim_{(t/\beta) \to 1-0} T(s+it) \quad \text{（作用素弱位相）}$$

ただし，$s \in \mathbb{R}$, $s \notin E_1$。

の２条件をみたすとき，次が成立する。

$\exists T \in \mathcal{B}(\mathcal{K}, \mathcal{H})$：

$$T(s) = \Delta_M^{-i(s/2\beta)} T \Delta_N^{i(s/2\beta)}.$$

$T(s)$ は $z \in \overline{S_\beta}$ で $T(z)$ に"解析接続"され，

$T(0) = T$,　$\overline{S_\beta}$ 上 $T(z)$ は作用素強位相で連続，

$$T(z + 2\beta t) = \Delta_M^{-it} T(z) \Delta_N^{it} \quad (z \in \overline{S_\beta},\ t \in \mathbb{R})$$

$$T(s+i\beta) = J_M T(s) J_N \quad (s \in \mathbb{R}).$$

定理４の証明の概要

最初にこの証明の特徴を列挙する。まずBorchersの定理では２変数の解析関数の正則領域の拡大に関し，境界での振舞を含めた微妙な議論を用いるが，ここではそれを非常に簡単化して，一変数解析関数についての「くさびの刃の定理」（い

くつかの成書に証明があり，Cauchyの積分定理で簡単に証明ができる）と，2変数の場合のOsgoodの定理（連続性がわかっている場合のHartogの定理）だけですむ。またエルミート字像の条件を使うだけで，重みの実現を仮定しなくてもよい。そのほか，連続性に関しても，境界の垂直方向からの弱連続性だけを仮定し，それも測度0の例外点集合（連続性を仮定しない点）を許容する。この最後の点は　　　　主要結果の証明に応用するとき是非必要になる。これらの弱い仮定から閉帯状領域の任意の点（内部では正則なので境界点が問題となる）で連続になり，特に例外点であらかじめ作用素が定義できていなくても，あらゆる方向から連続であるように定義できるところが大変応用で役に立つ。主要結果の証明への応用では，例外点は1点であるが，結果的に散乱理論で波動作用素とよばれるものの存在（t無限大の極限の存在）を証明したことになっているのは興味深い。既に序論で述べたように，Borchersの結果は巡回分離ベクトルの場合についてであったものを，正規半有限忠実な重みの場合に拡張した結論になっている。

証明の概要に入る。証明のひとつの道具は指数型の冨田環

$$\mathfrak{S}_\varphi = \Big\{ w\text{-}\int_{\mathbb{R}} f(t)\,\sigma_t^\varphi(x)\,dt : x \in \mathfrak{A}_\varphi^M,\ f \in L^1(\mathbb{R}),\ f\text{の台：コンパクト} \Big\}$$

(w-$\int$は作用素弱位相での積分)であり，これが自動的に正則性を与えてくれるので証明が簡単になる。すなわち，$y\in\mathfrak{S}_\varphi$に対し，$\Delta_M^{iz}y_\varphi$ および $\sigma_z^\varphi(y)$は$\mathcal{N}$およびMの元として，zの指数型整関数である。しかもy_φ ($y\in\mathfrak{S}_\varphi$) は$\mathcal{N}$で稠密である。同様に，N,ψに関する富田環$\mathfrak{S}_\psi$を定義する。

このとき任意の$x\in\mathfrak{S}_\psi$，$y\in\mathfrak{S}_\varphi$に対し，

$$f_1(z_1, z_2)=\left(T(z_2)\Delta_N^{-iz_1}x_\psi,\ J_M\Delta_M^{-iz_1}y_\varphi\right)$$

$$f_2(z_1, z_2)=\left(\Delta_M^{-iz_1+(1/2)}y_\varphi,\ T(\bar{z}_2)J_N\Delta_N^{-iz_1+(1/2)}x_\psi\right)$$

f_1は$\mathbb{C}\times\overline{S_\beta}$，$f_2$は$\mathbb{C}\times\overline{S_{-\beta}}$で定義され，それぞれ$S_\beta$，$S_{-\beta}$で正則である。さらに$T(s)$がエルミート写像であることから，

$$f_1(z, s)=f_2(z, s)\qquad (s\in\mathbb{R},\ z\in\mathbb{C},\ s\notin E_0)$$

が云える。したがって一変数の「くさびの刃の定理」(Moreraの定理と云われる)により，

$$z_1\in\mathbb{C},\qquad z_2\in S_\beta\cup S_{-\beta}\cup(\overline{S_\beta}\cap\overline{S_{-\beta}})=\{z\in\mathbb{C};\ |\mathrm{Im}\ z|<|\beta|\}$$

で正則な関数$F(z_1, z_2)$が存在して

$$\begin{aligned}F(z_1, z_2)&=f_1(z_1, z_2)\qquad (z_2\in\overline{S_\beta})\\&=f_2(z_1, z_2)\qquad (z_2\in\overline{S_{-\beta}})\end{aligned}$$

となる。さらに$J_MT(s+i\beta)J_N$のエルミート性から，

$$F(z_1+(i/2), s+i\beta)=F(z_1-(i/2), s-i\beta)$$

$$(s\in\mathbb{R},\ z_1\in\mathbb{C},\ s\notin E_1)$$

が得られ，$F(z_1, z_2)$は$(i, 2\beta i)$を周期とする２変数の

整関数であることがわかる。（Moreraの定理では，測度0の例外点集合 E_0，E_1 は，Cauchy積分に影響を与えないので許容される点に注意。）

したがって，$s\in\mathbb{R}$ を固定したとき

$$g(\zeta)=F(\zeta,\ s+2\beta\zeta)$$

は ζ の有界周期的整関数になり，ζ に無関係な定数になる。とくに $g(\zeta)=g(0)$，すなわち $F(0,s)=F(-s/2\beta,\ 0)$ であることから

$$T(s)=\Delta_M^{-is/2\beta}\,T(0)\,\Delta_N^{is/2\beta}$$

と云う結論が得られる。

E_0，E_1 の例外点や弱位相で E_0，E_1 以外での垂直方向での連続性という弱い仮定が気になる人には，次の方法がある。

$$T_n(z)=w\text{-}\int_{-\infty}^{\infty}T(z+t)f_n(t)\,dt,\qquad f_n(t)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\,e^{-nt^2}$$

とおくと，$T_n(z)$ は E_0 や E_1 の例外点もなく，また $\overline{S_\beta}$ での作用素弱位相での連続性を（境界を含めて）含めて，$T(z)$ の仮定を満たすので，上記の証明が心配なく適用できて，

$$T_n(z)=\Delta_M^{is/2\beta}\ T_n\ \Delta_N^{-is/2\beta}$$

が成立する。ここに $T_n=T_n(z)$ である。

$z\in S_\beta$ では $T_n(z)\to T(z)$ となり，上の等式が

$$T(z+s)=\Delta_M^{is/2\beta}\,T(z)\,\Delta_N^{-is/2\beta}$$

の形で成立する。そこで $s_0\in\mathbb{R}$，$s_0\notin E_0$ を固定し，

$$T = \Delta_M^{-i(s_0/2\beta)}\, T(s_0)\, \Delta_N^{i(s_0/2\beta)}$$

とおくと，境界に垂直方向の弱連続性から，$s \in \mathbb{R}$，$s \notin E_0$ で

$$T(s) = \Delta_M^{i(s/2\beta)}\, T\, \Delta_N^{-i(s/2\beta)}$$

が示される。そこで $y \in \mathfrak{S}_\varphi$，$x \in \mathfrak{S}_\psi$ に対して

$$\left(T \Delta_M^{i(z/2\beta)} x,\ \Delta_N^{i(\bar{z}/2\beta)} y \right)$$

は z の整関数であり，$z \in \mathbb{R}$，$z \notin E_0$ では，

$$(T(z)x,\ y)$$

に一致するので，解析接続の一意性（Osgood の定理を2つの関数の差（$z \in \overline{S}_\beta$）と $z \in \overline{S}_{-\beta}$ における0とに適用すればよい。）により

$$T(z) = \Delta_M^{i(z/2\beta)}\, T\, \Delta_N^{-i(z/2\beta)} \qquad (z \in \overline{S}_\beta)$$

が得られると同時に，例外点 E_0，E_1 にも $T(z)$ が拡張されて，$T(z)$ は $\overline{S}_\beta$ で作用素強連続になる。

§5 主要結果の証明の概要

(i) まず $\mathcal{H} = \mathcal{K}$，$\psi = \varphi|_N$，$T = 1$ とおく。

定理2 の (1) は $T=1$ で満たされるので，条件 (8) から

$$T(t) = \Delta_M^{it}\, \Delta_N^{-it}$$

の解析接続 $T(z) \in H^\infty(S_{-1/2})$ が得られて，$\overline{S}_{-1/2}$ で

$$\|T(z)\| \leq 1$$

をみたす。

(ii) 次に $\zeta \in \overline{S}_{-1/2}$ に対し

$$W(\zeta) = T(-\overline{\zeta})^{*}$$

を定義すると、

$$W(t) = \Delta_N^{-it}\,\Delta_M^{it} \qquad (t \in \mathbb{R}),$$

となり、

$$W(t - \tfrac{i}{2}) \quad (t\in\mathbb{R}), \qquad W(t) \quad (t\in\mathbb{R}, t \leqq 0)$$

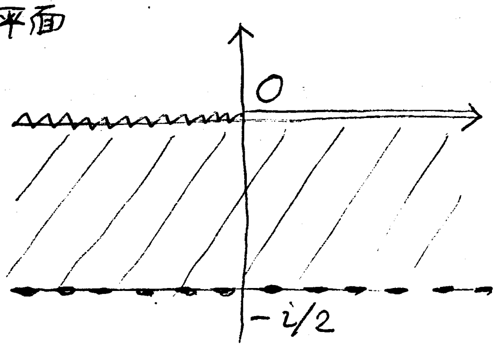
$$J_N\, W(s)\, J_N \quad (s \in \mathbb{R},\ s \geqq 0)$$

がすべて(ψ,ψ)についてエルミート写像になる。

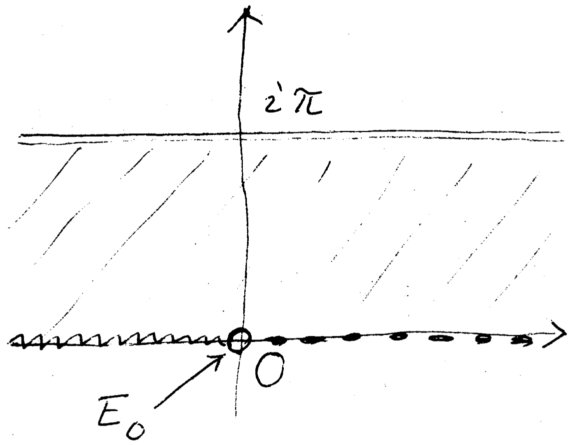
(iii) そこで次の変数変換を行う。

$$\zeta \in \overline{S}_{-1/2} \longrightarrow z(\zeta) = \log(1 - e^{2\pi\zeta}) \in \overline{S}_{\pi}$$

ζ-平面



z-平面



$$\zeta = -\infty \longrightarrow z = 0$$

$$\zeta = -0 \longrightarrow z = -\infty$$

$$\zeta = +0 \longrightarrow z = i\pi - \infty$$

$$\zeta = \frac{1}{2\pi}\log(1 - e^{z})$$

この変換により$Z(z)$を次のように定義する

$$Z(z(\zeta)) = W(\zeta) \qquad \left(Z(z) = W\left(\tfrac{1}{2\pi}\log(1 - e^{z})\right)\right)$$

(iv) $Z(z)$ はBorchersの構造定理の条件を満たすので，

$$(T=)\,Z(0)=\lim_{t\to-\infty}\Delta_N^{-it}\Delta_M^{it} \quad (\text{波動作用素})$$

が存在して

$$Z(z-2\pi t)=\Delta_N^{it}\,Z(z)\,\Delta_N^{-it}\,。$$

ただし $E_0=\{0\}$, $E_1=\phi$ にとる。

(v) さらに変数変換 $w=e^z$ を行い

$$V(e^z)=Z(z) \qquad (V(w)=Z(\log w))$$

を $\mathbb{C}_+$ で正則，$\overline{\mathbb{C}_+}$ で連続な関数として

$$w\in\mathbb{C}_+=\{w\in\mathbb{C}:\operatorname{Im} w>0\}$$

で定義する。次式が成り立つ

$$\|V(w)\|\leqq 1$$

(vi) $V(x)$ $(x\in\mathbb{R})$ が一助変数群であることが示せる。

$$V(x)\,V(y)=V(x+y)$$

したがって

$$V(t)=e^{itP}.$$

$\|V(t)\|\leqq 1$ より

$$P\geqq 0$$

がわかる。あとで $P=\bar{P}$, $V(x)=U(x)$ がわかる。その前に $U(x)=V(x)$ について，(1)〜(8)の性質を容易に示すことができる。したがって，Lie群のユニタリー表現の一般論から，p が本質的に自己共役で，$P=\bar{P}$ であることがわかる。

参考文献

[A-Z] H. Araki & L. Zsido, Extension of the structure theorem of Borchers & its application to half-sided modular inclusions. (In preparation.)

[B-W] J. Bisognano & E. Wichmann, On the duality condition for a Hermitian scalar field, J. Math. Phys. <u>16</u> (1975), 985-1007.

[Bo1] H. J. Borchers, The CPT-theorem in two-dimensional theories of local observables, Commun. Math. Phys. <u>143</u> (1992), 315—332.

[Bo2] H. J. Borchers, On the use of modular groups in quantum field theory, Ann. Inst. Henri Poincaré — Physique-Théorique <u>63</u> (1995), 331-382.

[Bo3] H. J. Borchers, Tensor Product decomposition in quantum field theory, Oberwolfach lecture, March 1997.

[Wie 1] H.-W. Wiesbrock, Half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, Commun. Math. Phys. <u>157</u> (1993), 83-92.

[Wie 2] H.-W. Wiesbrock, Symmetries and half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, Lett. Math. Phys. <u>28</u> (1993), 107-114.

[Wie 3] H.-W. Wiesbrock, Superselection structure of conformal field theory on the circle and localized Connes' cocycles, Rev. Math. Phys. 7 (1995), 133–160.

[Wie 4] H.-W. Wiesbrock, A note on strongly additive conformal field theory and half-sided modular standard inclusions, Lett. Math. Phys. 31 (1994), 303–307

[Wie 5] H.-W. Wiesbrock, Conformal quantum field theory and half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, Commun. Math. Phys. 158 (1993), 537–543.

[Wie 6] H.-W. Wiesbrock, Erratum: Half-sided modular inclusions of von Neumann algebras, Commun. Math. Phys. 184 (1997), 683–685.